Двадцатый Российский фестиваль юных математиков

Адлер. 14 октября 2009.

Первый тур. Лига стратегий

1. Лемма 1. Число a можно представить единственным способом в виде суммы s степеней двойки, а число b можно представить единственным способом в виде суммы t степеней двойки. Пусть S — фигура, полученная вырезанием верхней левой угловой клетки, из прямоугольника $(a+1)\times(b+1)$. Тогда фигуру S можно разбить на прямоугольники, у которых площадь степень двойки, и прилегающие либо к верхней либо к левой стороне фигуры, не более чем $(s+t)!$ способами.

Доказательство леммы 1.

Индукция по $s+t$. База $s+t=0$ очевидна. Переход. Заметим, что один из прямоугольников разбиения содержит целиком либо верхнюю, либо нижнюю сторону фигуры. Выбрать такой прямоугольник можно не более чем $s+t$ способами, а разбить оставшуюся часть не более чем $(s+t-1)!$ способами. Значит фигуру S можно разбить не более чем $(s+t)!$ способами.

Лемма 2. Число 2^k-1 нельзя представить в виде суммы менее чем k степеней двойки, причем в виде суммы ровно k степеней двойки это число можно представить единственным способом.

Доказательство леммы 2. Индукция по k. База $k=1$ очевидна. Переход. Несложно заметить, что в разложении числа 2^k-1 в сумму степеней двойки есть нечетное число единиц. Вычтем одну из них, а остальные, разбив на пары, заменим на двойки. сократим общий множитель 2 у всех слагаемых, и применим индукционное предположение.

Решение. Не умаляя общности будем считать, что вырезан верхний левый угол. По лемме 2 к верхней стороне фигуры примыкает по крайней мере m прямоугольников, а к левой по крайней мере n. Так как никакой прямоугольник не может примыкать к обеим сторонам, и всего их $m+n$, то к верхней стороне примыкает ровно m, а к левой ровно n. Осталось лишь применить лемму 1.

2. Пусть $f(u) \vdots p$, где p –простое. Тогда если при этом $u \not\vdots\, p$, то найдется такое v, что $uv-1 \vdots p$, получаем противоречие с условием. Таким образом если $f(u) \vdots p$, то $u \vdots p$, значит $s=f(0) \vdots p$, если $s\neq 0$, то у значений $f(u)$ конечное множество простых делителей, что невозможно (например достаточно рассмотреть значения $f(|s|^k)$). А тогда $f(0)=0$. Рассмотрим многочлен $f_1(u)=f(u)/u$. Очевидно, что для него также выполняется условие задачи. Будем проделывать такую операцию, очевидно, что в некоторый момент мы получим многочлен такой, что у его значений нет простых делителей, то есть ±1. А значит исходный многочлен имеет вид $f(x)=\pm x^n$.

3. Обозначим через X и Y точки пересечения окружности S и стороны AC. Несложно заметить, что $BN\cdot AC \geqslant BN\cdot\sqrt{CX\cdot CY} = BN\cdot CK$. Аналогично $AM\cdot BC \geqslant AM\cdot CK$. Осталось заметить, что $AM+BN\geqslant AB$.

4. Лемма. $\frac{OK^2}{OL^2}=\frac{KC}{LC}\cdot\frac{KA}{LA}$. *Доказательство леммы.*

Заметим, что $\angle AOK=\frac12\angle ADK=\frac12\angle CDL=\angle COL$. По теореме синусов для треугольника AOK получаем $\frac{OK}{AK}=\frac{\sin\frac{\angle A}{2}}{\sin\frac{\angle D}{2}}$. По теореме синусов для треугольника COK наблюдаем $\frac{OK}{CK}=\frac{\sin\frac{\angle C}{2}}{\cos\frac{\angle B}{2}}$. По теореме синусов для треугольника AOL догадываемся $\frac{OL}{AL}=\frac{\sin\frac{\angle A}{2}}{\cos\frac{\angle B}{2}}$. По теореме синусов для треугольника COK пожинаем $\frac{OL}{CL}=\frac{\sin\frac{\angle C}{2}}{\sin\frac{\angle D}{2}}$. Перемножая получаем требуемое.

Решение:

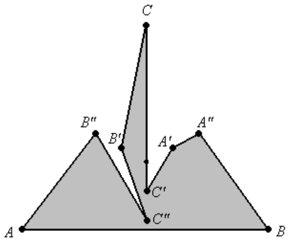
Заметим, что нам достаточно доказать, что $\frac{\sin\angle ALX}{\sin\angle XLO}=\frac{\sin\angle OLY}{\sin\angle YLC}$. Из условия следует, что $\frac{\sin\angle AKX}{\sin\angle XKO}=\frac{\sin\angle OKY}{\sin\angle YKC}$. Применяя теоремы синусов для треугольников AKO и OKC получаем, что $\frac{AX}{OX}\cdot\frac{OK}{AK}=\frac{OY}{YC}\cdot\frac{CK}{OK}$. Используя лемму получаем, что $\frac{AX}{OX}\cdot\frac{OL}{AL}=\frac{OY}{YC}\cdot\frac{CL}{OL}$. Применяя теоремы синусов для треугольников ALO и OLC получаем, что $\frac{\sin\angle ALX}{\sin\angle XLO}=\frac{\sin\angle OLY}{\sin\angle YLC}$.

5. Заметим, что $\frac{x_1}{1+x_2^2}=x_1-\frac{x_1x_2^2}{1+x_2^2}\geqslant x_1-\frac{x_1x_2^2}{2x_2}=x_1-\frac{x_1x_2}{2}$, тогда

$\sum\frac{x_i}{1+x_{i+1}^2}\geqslant\sum x_i-\frac{x_ix_{i+1}}{2}\geqslant 2-\frac12=\frac32$.

6. Да существуют. Построим их. Возьмем правильный треугольник ABC, также еще два правильных треугольника $A'B'C'$ и $A''B''C''$ как показано на рисунке (точки A, A' и A'' лежат на одной прямой, треугольники ABC, $A'B'C'$ и $A''B''C''$ имеют общий центр, точки A и A', а также A и A'' лежат по разные стороны от центра).

Искомыми девятиугольниками будут замкнутая ломаная $AB''C''B'CC'A'A''B$, также ее образы при поворотах на углы 120° и 120° относительно центра треугольника ABC.



7. Обозначим граф из условия через G.

Лемма 1. В полном ориентированном сильно-связном графе есть цикл, проходящий по всем вершинам.

Лемма 2. Если в ориентированном графе есть цикл длины k, то есть и цикл длины $k-1$.

Пусть G_0, G_1, $\ldots$, G_N — компоненты сильной связности графа G, причем для всех $0 \leqslant i < j \leqslant N$ и любых вершин $u_i \in G_i$ и $u_j \in G_j$ ребро ведет из вершины u_j в вершину u_i. По лемме 1 в каждой компоненте G_i есть цикл проходящий по всем вершинам, а значит по лемме 2, так как в G_i нет циклов длины $m+1$, то в G_i не более m вершин. Обозначим через a_i число вершин в $G_0 \cup \dots \cup G_i$. Выберем в компоненте G_k вершины v_k и w_k, такие, что ребро идет из вершины v_k в вершину w_k. Присвоим вершине v_k номер a_k, вершине w_k номер $a_{k-1}+1$ (здесь мы считаем, что $a_{-1}=0$), а всем остальным вершинам из компоненты G_k произвольные различные номера от $a_{k-1}+2$ до a_k-1. Заметим, что условие задачи выполняется.

8. Ответ 118. Заметим, что $x_{n+1} = x_n + x_n^2$ начиная с $n=2$. Отсюда видно, что если член последовательности делится на d, то и все последующие члены последовательности также будут делиться на d. Заметим также, что делимость на 2 у нас будет не позднее чем со второго члена последовательности, поэтому нам интересна делимость на 17 и на 59, так как $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$.

Лемма. Пусть $p = 6k-1$ простое число. Тогда $x^2+x+1 \not\vdots\, p$.

Доказательство: Если $x^2+x+1 \,\vdots\, p$, то $x^3-1 \,\vdots\, p$, тогда $x^{6k}-3 \,\vdots\, p$. По малой теореме Ферма мы знаем, что $x^{6k-2}-1 \,\vdots\, p$. Тогда $x-1 \,\vdots\, p$, значит $p=3$, что не так.

Пусть теперь у нас нашелся член последовательность x_n такой, что он кратен $p \underset{6}{\equiv} -1$, причем предыдущий x_{n-1} не кратен p, тогда $x_{n-1} \underset{6}{\equiv} -1$, что невозможно в силу леммы (если конечно $n-2$ натуральное число…).

Таким образом если когда-либо и появится число кратное p вида $6k-1$, то либо третий член последовательности был по модулю p сравним либо с 0, либо с -1.

Таким образом если в последовательности встретилось число, которое кратно 2006, то второй член этой последовательность по модулям 17 и 59 был сравним либо с 0, либо с -1.

Тогда первый член последовательность сравним с 0 или ± 4 по модулю 17 и сравним с 0 по модулю 59 так как -1 не является квадратичным вычетом по модулю 59. Значит число $59k \underset{1}{\equiv} 70,\ 4,\ -4$ то есть $k \underset{1}{\equiv} 70,\ 8,\ -8$. Откуда очевидно, что наименьшим таким числом является $452 = 8 \cdot 59$

9. Пусть $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$, $c = \cos\gamma$, $x_i = \sin\theta_i$, где α, β, γ, θ_i острые углы. Тогда $f(x_1, x_2, a) = 1$ равносильно тому, что $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos\alpha = \sin^2\alpha$, то есть существует треугольник со сторонами x_1, x_2, $\sin\alpha$ и углом $\pi - \alpha$ между x_1 и x_2. Из этого следует, по теореме синусов, что x_1 и x_2 равны синусам других острых углов этого треугольника, то есть $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$. Дальнейшие рассуждения очевидны.

10. При $y=0$ имеем $f(f(f(x))) = f(f(0))$, поэтому функция f инъективна. Подставляя $x=0$ получаем $f(f(f(0)+y)) = f(f(y))$, из инъективности функции f следует, что $f(y) = y + f(f(0))$. Итак $f(y) = y + C$. Осталось заметить, что $f(f(f(0))) = f(f(0))$, из чего следует, что $f(0)=0$, а значит $C=0$. Ответ: $f(y)=y$.

Адлер. 14 октября 2009.

Первый тур. Лига тактик

1. Оценим первое слагаемое: $\frac{a^3+bc}{a+b} \geqslant \frac{2a\sqrt{abc}}{a+b} \geqslant \frac{2a\sqrt{abc}}{a+b+c}$. Оценивая аналогично остальные слагаемые и суммируя, получаем требуемое неравенство.

2. См. решение задачи 2 из лиги стратегий.

3. Заметим, что количество баллов, набранных студентом, будет нечетным числом, не меньшим -21 и не большим 21. Значит есть 22 варианта для количества набранных баллов. Поэтому если каждый результат получился не более чем у трех студентов, то всего студентов не более 66. Противоречие.

4. См. решение задачи 4 из лиги стратегий.

5. Заметим, что $p+q$ делится на $p-q$, значит $p+q-(p-q) = 2q$ делится на $p-q$. Если $p-q=1$, то левая часть больше правой, если $p-q=q$ или $p-q=2q$, то p — не простое. Значит $p-q=2$. Тогда уравнение принимает вид $(q+2)+q = 2^r$, откуда $q+1 = 2^{r-1}$, откуда $q = 2^{r-1}-1$. Если $r=2$, то $q=1$, что не подходит. Если r — нечетно, то $2^{r-1}-1$ делится на 3, что означает, что $q=3$. Отсюда $p=5$ и $r=3$.

6. См. решение задачи 6 из лиги стратегий.

7. См. решение задачи 7 из лиги стратегий.

8. Отметим середину стороны AC — точка L и середину отрезка BH — точка M. Как известно, $BM=MH=OL$, а значит $BMLO$ — параллелограмм. Тогда ML — средняя линия трапеции $BHQP$, следовательно, L — середина отрезка QP. Отсюда следует, что треугольник OQP — равнобедренный, что и требовалось доказать.

9. Ответ: сможет. Разобъем клетчатую плоскость на доминошки следующим способом: замостим горизонтальными доминошками строчку, затем в следующей строчки сместим доминошки на одну клеточку и так далее. Заметим, что любой квадрат 2×2 содержит одну доминошку разбиения целиком. Петя будет на всякий ход Васи отвечать ходом в ту же доминошку, в которой Вася поставил крестик. Таким образом в любой доминошки будет крестик и нолик, а значит, крестики не будут образовывать квадрат 2×2.

10. См. решение задачи 10 из лиги стратегий.